Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică 2007

Etapa finală, Piteşti

11 aprilie 2007

CLASA A XI-A, SOLUŢII ŞI BAREMURI

Subiectul 1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2 + B^2 = AB$. Să se arate că $(AB - BA)^2 = 0_2$.

Soluţie. Fie $\varepsilon \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{R}$ o rădăcină de ordinul trei a unităţii. Atunci

$$(A+\varepsilon B)(A+\bar{\varepsilon}B) = A^2+B^2+\bar{\varepsilon}AB+\varepsilon BA = (1+\bar{\varepsilon})AB+\varepsilon BA = \varepsilon(BA-AB)$$

. . . . 2 puncte

Egalitatea obţinută conduce la

$$|\det(A+\varepsilon B)|^2 = \det(A+\varepsilon B)\cdot\overline{\det(A+\varepsilon B)} = \det(A+\varepsilon B)\cdot(A+\bar{\varepsilon}B) =$$

$$\varepsilon^2 \det(BA - AB)$$

şi în concluzie $\det(BA - AB) = 0$. . . . . 3 puncte

Cum $X^2 - \mathrm{tr}X \cdot X + \det X \cdot I_2 = 0$ pentru orice matrice 2×2 şi ţinând seama că $\mathrm{tr}(AB - BA) = 0$, deducem $(AB - BA)^2 = 0$. . . . . 2 puncte

Subiectul 2. Dacă numerele reale a şi b $(a < b)$ sunt în imaginea unei funcţii continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, arătaţi că există un interval $I \subset \mathbb{R}$ astfel încât $f(I) = [a, b]$.

Soluţie. Fie $a', b' \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(a') = a, f(b') = b$. Fără a restrânge generalitatea putem admite că $a' < b'$. . . . . 1 punct

Mulţimea $A = \{x | a' \leq x \leq b' \text{si} f(x) = a\}$ este nevidă, mărginită superior. Fie $\alpha = \sup A$. Din continuitatea funcţiei f rezultă că $f(\alpha) = a$. . . . 1 punct

Mulţimea $B = \{x \mid \alpha x \leq b' \text{ si } f(x) = b\}$ este nevidă şi mărginită inferior. Fie $\beta = \inf B$. Din continuitatea funcţiei f rezultă că $f(\beta) = b$. . . . . 1 punct

Arătăm că $I = [\alpha, \beta]$ verifică cerinţa. Intr-adevăr, incluziunea $[a, b] \subset f(I)$ rezultă din teorema valorii intermediare. Dacă există $x \in (\alpha, \beta)$ astfel încât $f(x) < a$, atunci există $x' \in (x, \beta)$ astfel încât $f(x') = a$ ceea ce contrazice alegera lui α. În mod analog, dacă ar exista $x \in (\alpha, \beta)$ astfel încât $f(x) > b$, atunci am contrazice definiţia lui β. Deci $f(I) \subset [a, b]$. . . 4 puncte

Subiectul 3. Definim $H_n = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1\}$. Să se arate că există un număr finit de matrici $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pentru care transformarea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dată de $f(x) = Ax$ are proprietatea $f(H_n) = H_n$:

a) pentru $n = 2$;

b) pentru orice $n \geq 3$.

Soluţie. a) Considerăm $A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in H_2$, $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in H_2$, $y_1 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \in H_2$ şi $y_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \in H_2$.

Scriind că $Ax_1 \in H_2, Ax_2 \in H_2, Ay_1 \in H_2$ şi $Ay_2 \in H_2$, obţinem relaţiile $|a| + |c| = 1 = |b| + |d|$ şi $|a \pm b| + |c \pm d| = 2$. ....1 punct

De aici rezultă $|a - b| = |a + b| = |a| + |b|$ şi $|c - d| = |c + d| = |c| + |d|$, posibile doar dacă $ab = cd = 0$. Cum a şi c nu pot fi simultan nule, iar b şi d la fel, rezultă că $a = \pm 1, c = 0, d = \pm 1, b = 0$, sau $a = 0, c = \pm 1, b = \pm 1, d = 0$. Aşadar există 8 matrice care verifică condiţia .... 2 puncte

b) Procedăm analog şi considerăm $A = (a_{ij})$ din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in H_n, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in H_n$.

Din $Ae_i \in H_n$ rezultă $\sum_{i=1}^{n} |a_{ij} = 1$ pentru orice $j = 1, 2, \ldots, n$, deci pe fiecare coloană măcar un element este nenul. Avem $x = \frac{1}{2}(e_1 \pm e_2) \in H_n$ şi prin urmare $Ax \in H_n$ deci

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{i1} + a_{i2}| = \sum_{i=1}^{n} |a_{i1} - a_{i2}| = 2.$$

De aici rezultă $|a_{i1} + a_{i2}| = |a_{i1} - a_{i2}| = |a_{i1}| + |a_{i2}|$, de unde $a_{i1}a_{i2} = 0$ ceea ce atrage $a_{i1} = 0$ sau $a_{i2} = 0$. .... 2 punct

Dacă pe coloana 1 avem $a_{i1} \neq 0$ rezultă $a_{i2} = \cdots = a_{in} = 0$. Deci şi pe fiecare linie şi pe fiecare coloană un singur element est enenul şi acesta aparţine mulţimii $\{\pm 1\}$. Aceasta înseamnă că cel mult $2^n n!$ matrici cu această proprietate (de fapt toate matricile găsite verifică $f(H_n) = H_n$). 2 puncte

Subiectul 4. Spunem că o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea $(\mathcal{P})$ dacă f este derivabilă cu derivata continuă şi satisface relaţia

$$f(x + f'(x)) = f(x)$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că

a) Dacă f are proprietatea $(\mathcal{P})$, atunci ecuaţia $f'(x) = 0$ are cel puţin o soluţie;

b) Daţi un exemplu de funcţie neconstantă cu proprietatatea $(\mathcal{P})$;

c) Dacă f are proprietatea $(\mathcal{P})$ şi ecuaţia $f'(x) = 0$ are cel puţin două soluţii, atunci f este o funcţie constantă.

Soluţie. a) dacă $f'(x) \neq 0$, teorema lui Lagrange pe $[x, x + f'(x)]$ (sau $[x + f'(x), x]$) implică

$$0 = f(x + f'(x)) - f(x) = f'(x) f'(c_x) \text{ cu }$$

c$_x$ punctintermediar(1)1*punct*

b) $f(x) = -x^2 + c$ (singurele soluţii polinoame neconstante !) . . 2 puncte

c) Pasul 1. Dacă $f'(a) = 0$, atunci $f'(x) \leq 0$ pe $[a, \infty)$ şi $f'(x) \geq 0$ pe $(-\infty, a]$.

Demonstraţie. Presupunem că există $x > a$ cu $f'(x) > 0$. Atunci există un interval $(c, d) \subset (a, \infty)$ pe care $f' > 0$. Fie acesta maximal, în particular $f'(c) = 0$ şi $g(x) = x + f'(x)$ continuă cu $g(c) = c$ şi $g(x) > c$ pe (c, d) atrag existenţa unui punct $e \in (c, d)$ astfel încât $c < g(x) < d$ pe (c, e) Alegând $x \in (c, e)$, relaţia (1) pe $[x, x + f'(x)] \subset (c, d)$ duce la o contradicţie. Analog pentru $x < a$. . . . . 2 puncte

Pasul 2. Dacă $a < b$, $f'(a) = f'(b) = 0$ rezultă f constantă pe $[a, b]$.

Demonstraţie. Din pasul 1: $f'(x)$ e negativă pe $[a, \infty)$ şi pozitivă pe $(-\infty, b]$ . . . . 1 punct

Pasul 3. Dacă $M = \{x \in \mathbb{R} \mid f'(x) = 0\}$ conţine 2 puncte atunci $M = \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Fie $\alpha = \inf M$, $\beta = \sup M$; din pasul 2, M este interval şi $f(x) = k$ constantă pe M. Presupunem $\beta < \infty$. Dacă există $\gamma > \beta$ cu $g(\gamma) = \gamma + f'(\gamma) \geq \beta$, atunci din (1) pe $[\gamma + f'(\gamma), \gamma]$ ajungem la o contradicţie. Altfel, pentru orice $x > \beta$: $g(x) < g(\beta) = \beta$. În acest caz există $\delta > \beta$ astfel ca pe intervalul (β, δ) avem $\alpha < g(x) < \beta$. În acest caz, pentru $x \in (\beta, \delta)$ $f(x) = f(g(x)) = k$, contradicţie. Analog se demonstarează că $\alpha = -\infty$.

. . . . 1 punct